

Classe 5

Verifica di matematica

1. Determina per quale valore di a la seguente funzione è continua in $x = -1$; traccia il grafico di $f(x)$ per il valore di a ottenuto.

$$f(x) = \begin{cases} ax + 7a & \text{se } x \in (-\infty, -1] \\ 4 - x^2 & \text{se } x \in (-1, 1] \\ \sqrt{x} + 2 & \text{se } x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

2. Spiega il significato che ha la condizione $f(a)f(b) < 0$ nelle ipotesi del teorema degli zeri.
3. Tra le funzioni elementari che conosci, individua una che non verifica il teorema di Weierstrass nell'intervallo $[-1, 1]$, motivando la risposta.
4. Enuncia il teorema di Rolle. Mostra con un controesempio (è sufficiente un disegno) che esso non vale se la funzione non è derivabile in un punto $x_0 \in (a, b)$.
5. Determina nell'intervallo $[-1, 0]$ il punto che verifica il teorema di Lagrange per la funzione $f(x) = \frac{x}{1-x}$.

6. Sia $f(x)$ una funzione continua e derivabile in \mathbf{R} . Mostra che alla funzione

$$g(x) = f(x)(b-a) - x(f(b) - f(a))$$

si può applicare nell'intervallo $[a, b]$ il teorema di Rolle e deduci che $f(x)$ soddisfa nello stesso intervallo il teorema di Lagrange.

- 7*. Traccia il grafico, per $x > 0$, della funzione $f(x) = x - [x]$ e mostra che essa è discontinua in ogni x intero.
- 8*. Ricorrendo al teorema degli zeri, prova a dimostrare questa affermazione:

"Ogni polinomio di grado dispari ha sicuramente almeno uno zero".